Les incertitudes

Faire une mesure (appelée mesurage) consiste à chercher la valeur numérique d'une grandeur, mais il est souvent impossible de trouver la valeur exacte (valeur vraie) de la grandeur, à cause des erreurs de mesure. C'est pourquoi il est important d'évaluer l' incertitude de mesure notée U (qui est une estimation de l'erreur de mesure) associée à la valeur mesurée.

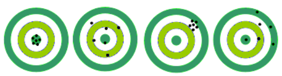
1 Les sources d'erreurs

1- L'erreur systématique

Un appareil de mesure défectueux, mal étalonné ou mal utilisé, conduit à des valeurs proches les unes des autres mais éloignées de la valeur vraie, c'est ce que l'on appelle l'erreur systématique

2- L'erreur aléatoire

Lorsque l'on effectue plusieurs fois le mesurage d'une même grandeur, dans les mêmes conditions expérimentales, les valeurs mesurées peuvent légèrement varier, c'est ce que l'on appelle l'erreur aléatoire



1 Erreurs faibles
2 Erreurs aléatoires
3 Erreurs systématiques
4 Erreurs systématiques et aléatoires

2 Incertitude sur une série de mesures: erreur de type A

Écart type expérimental : L'incertitude de mesure correspondant à des mesures répétées d'une même grandeur est appelée incertitude de répétabilité.
La théorie statistique montre alors que la meilleure estimation de la dispersion est mesurée par l'écart type expérimental noté S_{exp} ou S_{n-1} définit par:

$$\sigma_{n-1} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(m_i - \bar{m})^2}{n-1}}$$

m_i représente l'ensemble des mesures
$\bar{m}$ est la valeur moyenne de la série, noté parfois m_{moy}
n est le nombre total de mesures effectuées

Incertitude de répétabilité associée à la mesure M est noté U(M) tel que:

$$U(M) = k \times \frac{\sigma_{n-1}}{\sqrt{n}}$$

k est appelé facteur d'élargissement, il dépend du nombre de mesures effectuées et du niveau de confiance choisi (95% ou 99%). Sa valeur se trouve dans le tableau suivant issue d'une loi statistique appelée loi de Student.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
k(95%)	12,706	4,303	3,182	2,776	2,571	2,447	2,365	2,306	2,262	2,228	2,201	2,179	2,160	2,145	2,131
k(99%)	63,656	9,925	5,841	4,604	4,032	3,707	3,499	3,355	3,250	3,169	3,106	3,055	3,012	2,977	2,947

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
k(95%)	2,120	2,110	2,101	2,093	2,086	2,080	2,074	2,069	2,064	2,060	2,056	2,052	2,048	2,045	2,042
k(99%)	2,941	2,898	2,878	2,861	2,845	2,831	2,819	2,807	2,797	2,787	2,779	2,771	2,763	2,756	2,750

3 Incertitude sur une mesure unique: erreur de type B

Lorsqu'une mesure ne peut pas être faite plusieurs fois, il est impossible d'estimer une erreur de répétabilité, il faut donc repérer les différentes sources d'erreurs liées à l'appareil de mesure.

Appareil avec graduation

Incertitude lors d'une simple lecture sur une échelle graduée on a:

$$U_{lecture} = \frac{k \times 1\ graduation}{\sqrt{12}}$$

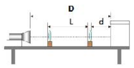
Incertitude lors d'une double lecture sur une échelle graduée on a:

$$U_{double\ lecture} = \sqrt{2\left(\frac{k \times 1\ graduation}{\sqrt{12}}\right)^2} = \sqrt{2} \times U_{lecture}$$

On prendra de manière générale pour un niveau de confiance de 95% *k = 2*

Incertitude sur la lecture d'une mesure de cette règle graduée

$$U_{lecture} = \frac{2 \times 1}{\sqrt{12}} = 0,58\ mm$$



Sur ce banc d'optique que l'on veuille mesurer D, L ou d deux lectures de mesures sont nécessaires, on aura donc pour ces trois grandeurs:

$$U_{double\ lecture} = \sqrt{2\left(\frac{2 \times 1}{\sqrt{12}}\right)^2} = 0,82\ mm$$

Appareil avec indication du fabricant

Lorsque le fabriquant indique la tolérance t d'un appareil de mesure on peut calculer l'incertitude qui est estimée à :

$$U_{tolérance} = \frac{2t}{\sqrt{3}}$$

$$U_{tolérance}(V) = \frac{2 \times 0,05}{\sqrt{3}} = 0,058\ mL$$

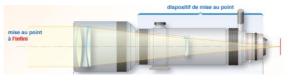
Un intervalle de mesure correct

Une expérience (mise au point en optique par exemple) donne parfois un ensemble de valeurs pour lesquelles les mesures semblent être justes, on pose alors:

$$a = \frac{x_{max} - x_{min}}{2}$$

Puis:

$$U = \frac{2 \times a}{\sqrt{3}}$$



4 Évaluation des incertitudes avec plusieurs sources d'erreurs

Lorsque plusieurs sources d'erreurs interviennent, le résultat doit tenir compte de toutes ces sources d'erreurs. Deux calculs sont alors envisageables:

Si c = a + b ou c = a − b ; alors $Ua = \sqrt{Ub^2 + Uc^2}$

Si c = a x b ou c = a / b ; alors $Uc = \sqrt{\left(\frac{Ua}{a}\right)^2 + \left(\frac{Ub}{b}\right)^2}$

Exemple 1 : *incertitude sur un volume versé à la burette graduée*
Les sources d'erreurs possibles sont dues aux deux erreurs de lectures (le zéro et le volume versé) ainsi qu'à la tolérance de la burette on aura ainsi :

$$U(volume) = \sqrt{2(U_{lecture})^2 + (U_{tolérance})^2}$$

Exemple 2 : *incertitude sur une vitesse lors de la mesure d'une distance et d'un temps*

On sait que $v = \frac{d}{\Delta t}$ on a donc $\frac{U(v)}{v} = \sqrt{\left(\frac{U(d)}{d}\right)^2 + \left(\frac{U(\Delta t)}{\Delta t}\right)^2}$

5 Présentation du résultat

Le résultat de mesure s'écrit :

$$M = m \pm U(M)$$

1- Convention d'écriture

Si elle existe l'unité doit être précisée.
Par convention l'incertitude sera arrondie à l'unité supérieure avec au plus deux chiffres significatifs. Ainsi le dernier chiffre significatif de la valeur mesurée doit être à la même position décimale que le dernier chiffre significatif de l'incertitude

2- Précision d'un résultat

La précision du résultat aussi appelée incertitude relative de calcul par :

$$\left(\frac{U}{M}\right) \times 100 \quad en\ \%$$

$$Si\ \frac{U}{m} \times 100 \leq 1\%\ \text{alors la mesure est de bonne qualité}$$

3- Comparaison avec une valeur de référence

On peut dans certains cas connaître une valeur de référence pour la valeur mesurée, la qualité du résultat de mesure est obtenue par un calcul d'incertitude relative tel que :

$$r = \frac{|m_{mesurée} - m_{référence}|}{m_{référence}} \times 100 \quad en\ \%$$

4- Améliorer la qualité d'une mesure

Quand l'incertitude relative est supérieure à 1% il faut chercher comment améliorer la qualité des mesures:
- Le matériel doit avoir une faible tolérance
- Le matériel doit-être utilisé correctement
- Le nombre de mesures doit être suffisant
- Ne pas arrondir les calculs successifs, les garder en mémoire dans la calculette