Représenter

Donner à voir les objets mathématiques

« Représenter », c'est donner à voir, ou au moins rendre perceptible à la vue et à l'esprit. Cette définition relativement simple recouvre cependant des réalités bien distinctes. « Représenter » des objets, des visages ou en tout cas des formes ou des solides est un premier niveau de représentation commun entre autres aux mathématiques, à la géographie, aux sciences et aux arts. Mais on peut aussi « Représenter » des relations entre les objets, que ce soit par un croquis de géographie, un codage en géométrie ou un schéma en électricité. Et il arrive enfin qu'on doive « représenter » des entités abstraites, qui n'ont pas d'autre mode d'existence que cette représentation : des nombres décimaux, des fractions, des fonctions, en un mot des objets mathématiques. Leur point commun est de ne pas être accessible par la vue, l'ouïe ou quelque autre sens : on ne peut pas montrer dans le monde extérieur une fonction, pas plus qu'on ne peut en fait montrer un cube, ou un cercle. Pour autant, l'existence de ces objets ne fait de doute pour aucun utilisateur des mathématiques, même occasionnel. Ces objets ne sont pas accessibles en eux-mêmes, seulement par leurs représentations, qui sont comme des chemins vers un objet auquel on ne pourrait pas avoir directement accès. Ces représentations diverses peuvent alors appartenir à différents registres : registre graphique, registre du langage naturel (« un parallélépipède à 6 faces »), registre numérique, registre de l'écriture symbolique, etc.

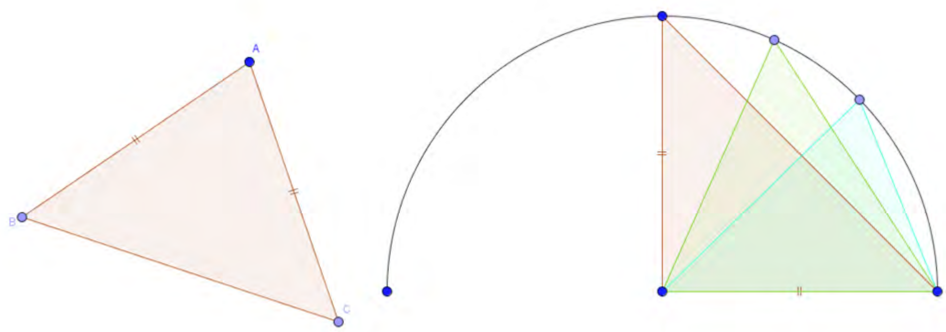
Le développement de la compétence « Représenter » au cycle 4 doit à la fois permettre à l'élève de progresser dans la vision du réel et dans l'appréhension des objets mathématiques abstraits. Comprendre ce qu'est un triangle, ce qu'est une fonction, ce qu'est une fraction, c'est savoir « représenter » ces objets, c'est-à-dire trouver un registre de représentation adéquat, mais aussi savoir varier les représentations et les registres de représentation. Un élève capable de convoquer dans un exercice mettant en jeu une fonction un graphique, un tableau de nombres, une écriture symbolique, est en train de s'approprier la notion de fonction. Dans cet exercice, on voit que la représentation est aussi pensée de manière dynamique, dans sa capacité à engendrer d'autres représentations, à l'intérieur d'un même registre ou dans un autre registre.

> « Mais surtout, l'activité mathématique de recherche et de preuve consiste à transformer des représentations [...], données dans le contexte d'un problème posé, en d'autres représentations sémiotiques. Et, de ce point de vue, une représentation [...] n'est intéressante que dans la mesure où elle peut se transformer en une autre représentation, et non pas en fonction de l'objet qu'elle représente ».[1]

1. Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques – Raymond Duval - 2011.

Si on poursuit l'analyse, on peut remarquer que les différentes représentations de la fonction traitée dans cet exercice ne la concernent pas en tant qu'objet spécifique (la fonction f de l'exercice), mais s'appliquent à une catégorie plus vaste à laquelle elle est rattachée (ici la catégorie des fonctions)[2].

Par ailleurs, si pour cerner un objet mathématique, il est nécessaire de varier les registres, pour résoudre un problème, il est souvent pertinent de se placer dans un domaine mathématique qui n'est pas nécessairement celui de l'énoncé : on parlera alors de changement de cadre. Ainsi, le problème du maximum de l'aire d'un triangle isocèle de côté 6, posé dans le cadre géométrique à partir d'une figure, pourra être traité dans ce cadre géométrique (en considérant un cercle bien choisi), ou dans un cadre fonctionnel, lui-même pouvant être associé à un registre numérique (des valeurs approchées de l'aire étant obtenues à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique ou d'un tableur) ou plus tard, au lycée au registre des écritures symboliques.



Le signe et la pensée

Le premier des modes de représentation, avant même la figure est le signe : lettre, symbole, chiffre, cette mise en forme des idées mathématiques est aussi essentielle aux mathématiques que les pièces du jeu le sont aux échecs. Mais ces formes, ces lettres qui constituent la langue des idées ont elles-mêmes une forme, parfois un sens comme le rappelle le logicien Frege[3] :

> « En offrant au regard le signe d'une représentation, elle-même appelée à la conscience par une perception, on crée un foyer stable autour duquel s'assemblent d'autres représentations. Parmi celles-ci, on en pourra de nouveau choisir une et offrir au regard son signe. Ainsi pénétrons-nous pas à pas dans le monde intérieur des représentations, et y évoluons nous à notre gré, usant du sensible nous-mêmes pour nous libérer de sa contrainte ».

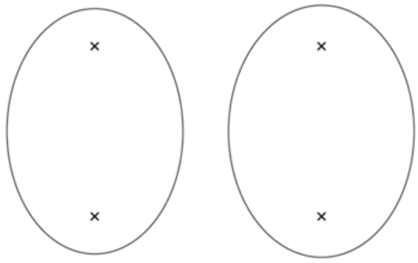
Le philosophe pointe ici la force et le risque du signe : il est utile par les images qu'il convoque et les actions qu'il permet, mais il peut engendrer aussi de fausses images : le nombre a qui

2. Parmi les grandes catégories d'objets mathématiques utilisés au cycle 4, on peut citer les nombres rationnels, les fonctions, les figures géométriques du plan ou de l'espace, les symboles littéraux. Ces grandes catégories sont reliées aux classes de problèmes qu'elles permettent de résoudre (proportionnalité, dépendance d'une grandeur en fonction d'une autre, modélisation géométrique, résolution d'équations, etc.).

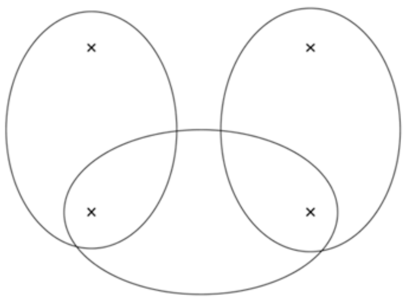
3. Que la science justifie un recours à l'idéographie, 1882, in Ecrits logiques et philosophiques, trad. C. Imbert, Seuil, 1971.

ne peut être que positif, le nombre n qui ne peut être qu'entier, la bande numérique où un nombre est toujours plus petit que celui qui est à sa droite. Une représentation peut posséder pour l'élève une logique qui diffère de celle que l'enseignant lui associe. Que l'on pense à ce dialogue imaginaire de L. Wittgenstein[4] :

« Il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2=4 »



« Alors il me suffit simplement de regarder la figure pour voir que 2+2+2=4 »



Un autre problème apparait ici, plus large que celui de la nécessaire variation des représentations, c'est la question de la bonne compréhension de la représentation par l'élève : comment savoir que l'élève a bien compris l'usage de la représentation, par exemple qu'il distingue bien les objets visés par les deux représentations 1,4 et ¼. Une réponse possible consiste à faire verbaliser par l'élève sa perception de la représentation, en passant donc dans le registre du langage naturel : la verbalisation peut alors se faire sous la forme : « 1,4 représente une unité et quatre dixièmes, ou quatorze dixièmes ; on peut également la représenter par 1+ 4/10, ou 14/10 ; ¼ représente le quart de l'unité ». La stabilisation de la compréhension de l'objet mathématique sous-jacent passe par l'utilisation de ses différentes représentations dans des contextes différents, pour résoudre des problèmes variés, et le passage d'un registre de représentation à un autre en précisant l'intérêt de chacun dans la situation proposée (représenter le nombre 1,4 sur une droite graduée, partager un segment en quatre, poser l'équation à trou … x 4 = 1).

Changements de registre : l'apport des outils numériques

L'usage des outils numériques facilite la mise en œuvre concrète des changements de registre de représentation, que ce soit grâce aux tableurs ou aux logiciels de géométrie dynamique : définir une fonction par une formule déclenche aussitôt le tracé des graphiques, ou l'apparition d'un tableau de valeurs. À l'inverse, un tableau de valeurs permet de placer des points, de proposer une interpolation, une ou plusieurs formules.

4. *Remarques sur les fondements des mathématiques*, Paris, Gallimard, coll. Bibliothèque de philosophie.

Ce changement de registre se trouve d'autant facilité qu'il s'effectue immédiatement et sans effort. Mais cette simultanéité ne doit pas conduire à penser que la conversion est limpide pour les élèves. Si les outils numériques permettent d'automatiser des processus mentaux, ceux-ci doivent avoir été auparavant compris et d'une certaine manière éprouvés par les élèves (par le calcul mental ou posé, par le dessin à l'aide d'instruments de géométrie, etc.).

Nombres

Les nombres constituent un des points les plus délicats et les moins immédiatement visibles de l'application des changements de registre. C'est au cycle 4 que ce qui était représenté par des parts de gâteau, un point sur la demi-droite graduée, le résultat d'une opération de division doit pouvoir pour l'élève renvoyer à un même objet : un nombre. Cette possibilité de changement de registre doit être mise en œuvre régulièrement car elle ne revêt pas la même facilité selon qu'il s'agit de 2, de 0,5, de 3/4, de 2/3, de 5/3 (la représentation des parts de gâteau peut être un obstacle à la conception d'une fraction supérieure à 1). La compréhension d'un nombre décimal, plus tard d'un nombre rationnel positif ou négatif ne peut s'envisager sans changement de registre, d'autant que tous les registres ne seront pas aussi pertinents pour un élève : envisager 2/3 comme représentation de deux parts d'un tout partagé en trois est une chose naturelle pour l'élève depuis le cycle 3, mais le cycle 4 va fournir de nouveaux outils permettant de le voir comme un point de la droite graduée. Des calculs de rapports et de proportions, la résolution de l'opération à trou 2 x … = 3, puis celle de l'équation $2x = 3$, le théorème de Thalès viendront progressivement conforter cette réalité. Les activités de calcul mental, les activités de calcul dans un contexte géométrique ou dans un contexte arithmétique constituent autant d'occasions de rappeler et de consolider la variété de ces représentations du nombre. Comprendre que la notion de nombre rationnel étend celle de nombre décimal, qui elle-même étend celle de nombre entier fait partie des objectifs du cycle 4. Les écritures et les représentations des nombres doivent être revues et mises en jeu tout au long du cycle.

Organisation et gestion de données et fonction

La représentation joue dans l'organisation et la gestion de données un rôle particulier. Il s'agit de représenter des séries de nombres, objets abstraits pour lesquels toutes les représentations sont mathématiquement équivalentes. Mais du fait que ces séries de nombres ont un lien fort avec le monde réel, ces représentations ne sont pas du tout équivalentes dans l'effet qu'elles produisent. Le choix d'une représentation (diagramme en barres ou camembert), comme celui d'une échelle peuvent majorer un minorer un phénomène, exagérer ou minorer un écart, éclairer une décision ou tromper un lecteur. Le nécessaire travail sur les registres prend ici un relief particulier, en ce qu'il rencontre la formation du citoyen et accompagne le développement de l'esprit critique. Dans cet esprit, tout travail engagé sur des données réelles, notamment dans le cadre d'un EPI, permet de mettre en lumière les enjeux des choix de représentation. La notion de fonction, qui nait véritablement pour les élèves au cycle 4, continuera à se mettre en place au lycée et même au-delà. Les fonctions font en effet partie de ces objets mathématiques que les élèves vont être amenés à manier pendant longtemps sans en avoir une définition formelle rigoureuse. Le changement de registre de représentations est donc ici nécessaire pour cerner l'objet fonction. On ne peut pas dire ce qu'est une fonction, *mais on peut dire, grâce à cette formule, j'ai défini une fonction, que je pourrais aussi définir par une courbe.*

Représenter en géométrie

La compétence « Représenter » reste bien entendu centrale dans l'étude de la géométrie. Le thème « Espace et géométrie » propose sous le titre Représenter l'espace une série de contenus dont la maitrise permet à l'élève de collège de continuer à progresser dans la compréhension des objets qu'il a sous les yeux, au travers de la perspective, mais aussi d'objets qu'il ne peut embrasser du regard : c'est tout l'enjeu de la représentation de la Terre, du repérage sur la sphère, dans l'espace ou dans le plan. La circulation entre les différents registres (maquettes, vues de dessus et de profil, croquis, patrons, modélisations 3D issues de logiciels de géométrie, objets conçus à l'aide d'une imprimante 3D) doit être travaillée tout au long du cycle.

La représentation en géométrie ne se cantonne pas à ce lien avec le réel, mais accompagne la maitrise de l'abstraction et les débuts de la démonstration au travers des figures et de leurs codages, et des transformations. On retrouve cet « Art de raisonner juste sur des figures fausses » pour reprendre la formule de Descartes. Un triangle isocèle peut être représenté par une figure représentant un triangle isocèle ou un triangle quelconque bien codé, par l'expression *Soit ABC un triangle isocèle*. Cette possibilité peut être source de difficulté pour des élèves à qui parallèlement on demande de travailler sur la vérité et la justesse des représentations au travers de représentations en perspectives ou à l'échelle. La notion de schéma constitue pour les élèves un pas important à bien marquer, où on s'attache à montrer que la force du schéma réside dans sa capacité à condenser les éléments nécessaires à la démonstration.

Bibliographie

- Idées directrices pour analyser les problèmes de compréhension dans l'apprentissage des mathématiques - DUVAL R. (2011).
- Rationnels et proportionnalité, complexité et enseignement au début du collège - ADJIAGE R. (2007). Revue Petit x 74 IREM Grenoble
- Le rôle d'un processus de visualisation géométrique complémentaire du registre numérique - BARRERA R. (2011). Revue Petit x 85 IREM Grenoble
- Représentation des fractions et des nombres décimaux chez les élèves de CM2 et du collège - PERRIN-GLORIAN (1986). Revue Petit x 10 IREM Grenoble